数である．1-1表に σ の値も示してあるが，たとえば鋼鉄のような硬い金属で0.3，金や鉛のような柔らかい金属で0.45程度，またゴムで0.48程度である（$\sigma < 1/2$ であることは後節§1.2の(4)で述べる）．

(3) 圧縮・膨張

体積 V の弾性体に一様な圧力 p を加えたとき，体積がわずかに変化して $V + \Delta V$ になったとしよう．このときにも体積変化の割合と圧力 p（これは法線応力）の間には比例関係が成り立つことが知られている．すなわち

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa p \qquad \text{あるいは} \qquad p = -K\frac{\Delta V}{V} \tag{1.3}$$

ここで κ は**圧縮率**，$K(=1/\kappa)$ は**体積弾性率**とよばれる物質定数である．(1.3) の関係は，気体の場合の**ボイルの法則**の一般化でもある．体積弾性率は前述のヤング率 E やポアソン比 σ を用いて表すことができる．

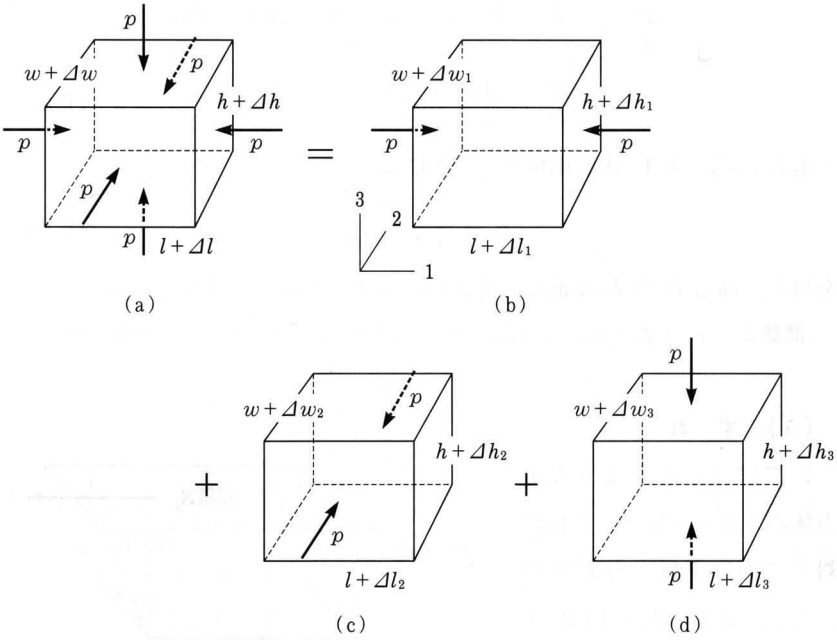
(4) K と E の関係

1-6図(a) に示したような長さ l, w, h の直方体のすべての面に圧力 p がはたらき，体積が $V(=lwh)$ から $V + \Delta V$ に変化したとしよう．このとき (1.3) 式から

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{p}{K} \tag{1.4}$$

ところで，弾性体のこの体積変化は図(b)～(d)に示したような3つの変形の重ね合せの結果とも考えられる．ただし，図(b)，(c)，(d) はそれぞれ1，2，3の各方向（図を参照）にだけ圧力がはたらいている場合の変形を考えたものである．

図(b)，(c)，(d) のそれぞれの場合の変形に対して添字1，2，3をつけて区別すると



1-6図　微小変形の重ね合せ

$$
\left.
\begin{array}{lll}
\text{(b)} & \text{(c)} & \text{(d)} \\
\dfrac{\Delta l_1}{l} = -\dfrac{p}{E}, & \dfrac{\Delta w_2}{w} = -\dfrac{p}{E}, & \dfrac{\Delta h_3}{h} = -\dfrac{p}{E} \\
\dfrac{\Delta w_1}{w} = -\sigma\dfrac{\Delta l_1}{l} = \dfrac{\sigma p}{E}, & \dfrac{\Delta l_2}{l} = -\sigma\dfrac{\Delta w_2}{w} = \dfrac{\sigma p}{E}, & \dfrac{\Delta l_3}{l} = -\sigma\dfrac{\Delta h_3}{h} = \dfrac{\sigma p}{E} \\
\dfrac{\Delta h_1}{h} = -\sigma\dfrac{\Delta l_1}{l} = \dfrac{\sigma p}{E}, & \dfrac{\Delta h_2}{h} = -\sigma\dfrac{\Delta w_2}{w} = \dfrac{\sigma p}{E}, & \dfrac{\Delta w_3}{w} = -\sigma\dfrac{\Delta h_3}{h} = \dfrac{\sigma p}{E}
\end{array}
\right\}
\tag{1.5}
$$

となるので，1，2，3の各方向に対する伸びは全体で $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$, $\Delta w = \Delta w_1 + \Delta w_2 + \Delta w_3$，$\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3$，したがって，伸びの割合は

$$
\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\frac{(1-2\sigma)p}{E} \tag{1.6}
$$

となる．体積変化率は

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(l+\Delta l)(w+\Delta w)(h+\Delta h) - lwh}{lwh}$$

$$\approx \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta w}{w} + \frac{\Delta h}{h} = -\frac{3(1-2\sigma)p}{E} \qquad (1.7)$$

であるから，(1.4) 式と比較することにより

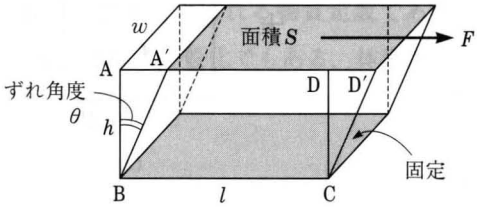
$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)} \qquad (1.8)$$

を得る．通常 K や E は正であるから，(1.8) から $\sigma < 1/2$ となる．

［**問題 2**］ 1-1 表の E，σ，K について (1.8) 式の成立することを確かめよ．

(5) ずれ

1-7 図に示したような直方体の下面を固定し，上面に対して面に平行な力 F を加えると，上下の面が平行にずれるような変形が起こる．この変形を**ずれ**とよぶ．体積は変化しない．面にはたらく力の大きさは単位面積当り $f = F/S$（S は上面の面積）で，方向は面に平行である．このような応力を**接線応力**あるいは**せん断応力**とよぶ．ずれの程度を量的に表すためには，1-7 図に示したように変形前に固定面に垂直であった辺 AB がずれによって傾いた角度 θ を用いるのが適切である．ずれが微小であれば（$\theta \ll 1$），この θ と f の間には比例関係が成り立ち



1-7 図　ずれ

$$\theta = \frac{f}{G} \qquad \text{あるいは} \qquad f = G\theta \qquad (1.9)$$

と表される．G を**ずれ弾性率**または**剛性率**とよぶ．G も物質定数であり，E や σ を用いて表すことができる．

(6) G と E の関係

簡単のために1-7図で $h = l$ と仮定する．ずれ変形の前後での対角線の長さは1-8図(a)から明らかなように

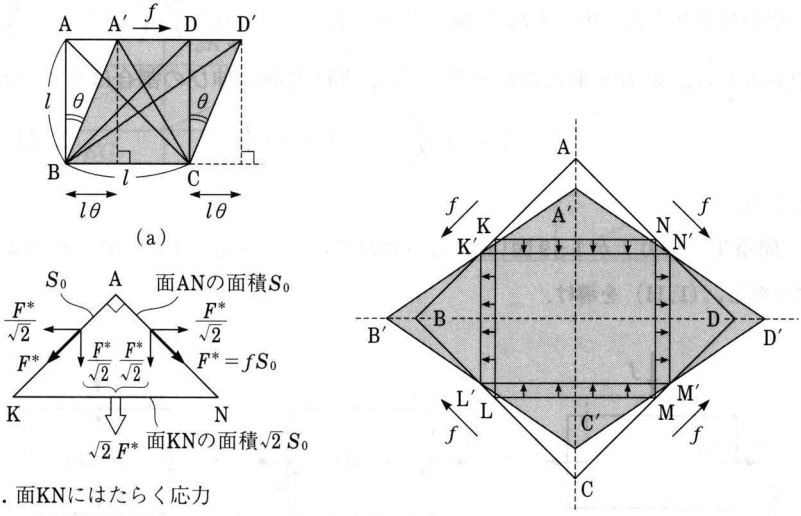
$$\mathrm{AC} = \mathrm{BD} = \sqrt{2}\,l, \qquad \begin{Bmatrix} \mathrm{A'C} \\ \mathrm{BD'} \end{Bmatrix} = \sqrt{l^2 + [(l(1 \mp \theta)]^2} \approx \sqrt{2}\,l\left(1 \mp \frac{1}{2}\theta\right)$$

であるから，対角線方向の伸びの割合はAC，BD方向にそれぞれ

$$\frac{\mathrm{A'C} - \mathrm{AC}}{\mathrm{AC}} = -\frac{\theta}{2}, \qquad \frac{\mathrm{BD'} - \mathrm{BD}}{\mathrm{BD}} = \frac{\theta}{2} \tag{1.10}$$

である．

1-8図(a)では弾性体が不動であると仮定していたが，もし上面に応力がはたらいているだけであるとすると，これによって並進運動や回転運動が起こってしまう．そこで，いま考えている弾性体を静止させたままでずれ変形を起こさせるためには，図(b)のように，大きさが等しく向きが反対の接線



1-8図　純粋なずれによる内接四辺形の変形

応力を互いに向かい合う面に加え，それと同時に隣合う面にはたらく力のモーメントが打ち消されるようにする必要がある．このような応力による変形を**純粋なずれ**とよぶ．

図(b) のように，正方形断面 ABCD をもつ弾性体に接線応力 $f = F/S$ (S は辺 AB の長さと奥行きの積) がはたらき，純粋なずれ変形が起こったとする．この変形で各辺の中点を結ぶ四辺形は正方形 KLMN から長方形 K′L′M′N′ に変化する．面 KN や面 LM にはたらく応力は圧力 f であり，面 KL や面 MN にはたらく応力は張力 f である (図(c) 参照)．これを考慮して AC 方向，BD 方向の伸縮の割合を計算してみよう．§1.2 の (4) で述べたのと同様に (次の [問題 3] も参照)，AC 方向，BD 方向にだけ法線応力 f がはたらいたと仮定すれば，

AC (または BD) 方向の伸びの割合は $-\dfrac{f}{E}\left(\text{または } \dfrac{f}{E}\right)$,

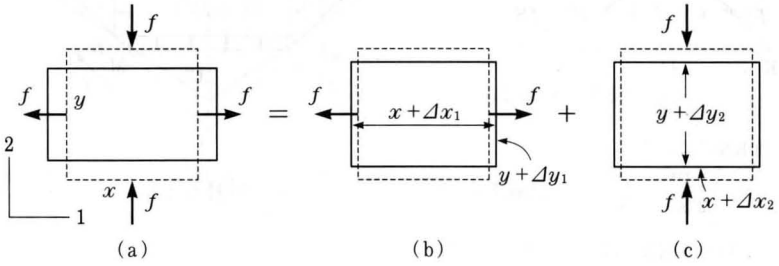
その結果生じた BD (または AC) 方向の伸びの割合は $\dfrac{\sigma f}{E}\left(\text{または } -\dfrac{\sigma f}{E}\right)$

であるから，両者を重ね合わせると AC，BD 方向の伸びの割合はそれぞれ

$$-(1+\sigma)\frac{f}{E}, \qquad (1+\sigma)\frac{f}{E} \tag{1.11}$$

となる．

[**問題 3**]　応力 f が 1-9 図(a) のようにはたらいている．これを (b), (c) のように分解し，(1.11) を導け．



1-9 図

(1.11) 式を (1.9), (1.10) と比較して

$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)} \tag{1.12}$$

を得る．通常 E, $G > 0$ であるから $\sigma > -1$. 前述の結果と合わせて

$$-1 < \sigma < \frac{1}{2} \tag{1.13}$$

となる．しかし，$\sigma < 0$ となる物質，すなわち，一つの方向に引き伸ばしたときにこれと垂直な方向にも広がるような物質は見つかっていないので，経験的には

$$0 \leqq \sigma < \frac{1}{2} \tag{1.13$'$}$$

と考えてよい．

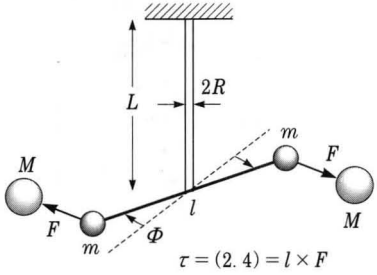
［**問題 4**］ 1-1 表の G, E, σ について (1.12) 式の成立することを確かめよ．

［**問題 5**］ E, G, K, σ の間の次の関係式を導け．

	G, E	G, K	E, K	G, σ	E, σ	K, σ
$E=$		$\frac{9GK}{3K+G}$		$2(1+\sigma)G$		$3(1-2\sigma)K$
$G=$			$\frac{3EK}{9K-E}$		$\frac{E}{2(1+\sigma)}$	$\frac{3(1-2\sigma)K}{2(1+\sigma)}$
$K=$	$\frac{EG}{3(3G-E)}$			$\frac{2(1+\sigma)G}{3(1-2\sigma)}$	$\frac{E}{3(1-2\sigma)}$	
$\sigma=$	$\frac{E}{2G}-1$	$\frac{3K-2G}{2(3K+G)}$	$\frac{1}{2}\left(1-\frac{E}{3K}\right)$			

(2)　ねじれ秤り

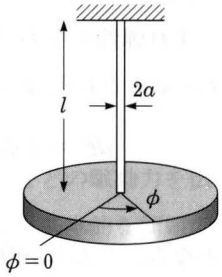
弾性体の棒のねじれに要するモーメントが半径の4乗に比例するという上の結果は，半径を小さくすることによって非常に小さなモーメントの測定が可能であることを示唆している．これを利用したものがねじれ秤りである（2-2図）．実際にクーロンが電気力の逆2乗法則を発見したとき(1785年)，キャベンディッシュが万有引力の法則を確認したとき(1798年頃)，レベデフが光の圧力を測定したとき（1899年）などには，この方法が利用された．



2-2図　ねじれ秤り

(3)　ねじれ振動

2-3図のように，回転の**慣性モーメント** I（下の[注]も参照）の剛体が長さ l，半径 a の細い弾性体の糸に吊され，糸を軸として回転できるようになっているとする．ただし，糸の上端は壁に，下端は剛体に固定されている．いま水平面内で剛体をつり合いの位置から角度 ϕ_0 だけねじって静かに放したとすると，糸の弾性による復元力のために剛体は回転振動（ねじれ振動）を始める．剛体の回転運動の方程式は，一般に**オイラーの方程式**で与えられ，慣性主軸を軸とする回転については



2-3図　ねじれ振動

$$I\frac{d\omega}{dt} = N \tag{2.5}$$

が成り立つ．ここで ω は回転の角速度，N は力のモーメントである．いまの例では ω や N は回転軸（糸）に平行な成分だけを考えればよいので

$$I\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{\pi G a^4}{2l}\phi \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{d^2\phi}{dt^2} = -\Omega^2\phi, \qquad \Omega = \sqrt{\frac{\pi G a^4}{2Il}} \tag{2.6}$$

となる．ただし，ϕ はねじれの角度で，$\omega = d\phi/dt$ である．$t = 0$ で $\phi = \phi_0$, $d\phi/dt = 0$ として (2.6) 式を解けば

$$\phi = \phi_0 \cos \Omega t, \qquad \text{周期} \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} = \sqrt{\frac{8\pi Il}{Ga^4}} \tag{2.7}$$

となる．この回転振動系は，ずれ弾性率 G を求めるときにも利用される．

［**問題 1**］ 糸の長さ l と半径 a, 剛体の慣性モーメント I がわかっているとき，ずれ弾性率 G を決定する方法を述べよ．

［**注**］ 剛体の回転の慣性モーメント

平板状の剛体がその面に垂直な軸 OO′ の周りに角速度 ω で回転をするときの回転運動について簡単にまとめておこう．2-4 図に示したように，位置 $\boldsymbol{r}$ にある微小な体積 dV の部分がもっている角運動量 $d\boldsymbol{L}$ は

$$d\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times (\rho\, dV)\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$

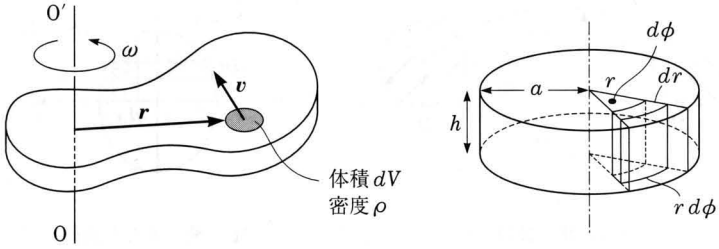
である．向きは OO′ 軸方向 ($\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} /\!/ \boldsymbol{\omega}$) なので，ここでは大きさについてだけ考えると

$$dL = r(\rho\, dV)v = \rho r^2 \omega\, dV$$

となる．ただし，$dL = |d\boldsymbol{L}|$, $r = |\boldsymbol{r}|$, $v = |\boldsymbol{v}| = \omega r$, $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$ である．これを剛体全体にわたって積分すれば，全角運動量の大きさ L が得られ，

$$L = \int_{(\text{剛体全体})} \rho r^2 \omega\, dV = I\omega, \qquad I = \int_{(\text{剛体全体})} \rho r^2\, dV$$

となる．たとえば，半径 a, 厚さ h で密度一様な円板の中心軸の周りの慣性モーメントは



2-4 図

$$I = \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho r^2 (h\, dr\, r\, d\phi) = \frac{1}{2} M a^2$$

となる．ただし，$M = \pi a^2 h \rho$ は円板の質量である．

力のモーメントの大きさ N は

$$N = \int r \times dF = \int r \times \rho \dot{v}\, dV = \frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt}$$

で与えられる．I は回転角速度の変化の起こりにくさを表すので，**(回転の)慣性モーメント**とよばれる．

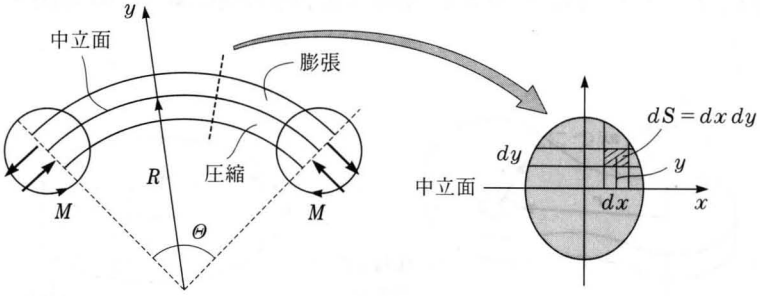
§2.2　棒の曲げ

(1)　棒にはたらくモーメントと曲げ

2-5図(a) のように真直な弾性体の棒の両端に力のモーメントを加え，棒を平面内で曲げる場合を考えてみよう．棒は外側では引き伸ばされ内側では圧縮されるから，その中間に伸び縮みのない面が生じている．これを**中立面**とよぶ．太さや材質の一様な棒をわずかに曲げる場合には，曲げたあとの棒の形は円弧で近似できる．そこで，中立面の曲率半径を R，その面を基準として外側に測った高さを y として伸びの割合 $\Delta l/l$ を表すと

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{(R+y)\Theta - R\Theta}{R\Theta} = \frac{y}{R} \tag{2.8}$$

となる．ただし Θ は円弧状に曲がった棒の張る中心角である．したがって，



(a) 棒の曲げ　　(b) 軸に垂直な断面

2-5図

断面内の微小面要素 $dx\,dy$（図(b) の斜線部分）に垂直にはたらく応力 f は，ヤング率を E とすれば

$$f = E\frac{\Delta l}{l} = E\frac{y}{R} \tag{2.9}$$

と書くことができる．この力によって中立面の周りに生じているモーメント dM は

$$dM = y \times (f\,dx\,dy) = \frac{E}{R}y^2\,dx\,dy \tag{2.10}$$

となる．そこで，これを棒の断面全体にわたって積分すれば，棒を曲げるのに必要なモーメント M が得られ

$$M = \int dM = \frac{E}{R}\iint y^2\,dx\,dy = \frac{E}{R}I \tag{2.11}$$

となる．ここで I は断面の**幾何学的慣性モーメント**とよばれ

$$I = \iint_{(\text{断面全体})} y^2\,dx\,dy \tag{2.12}$$

と定義される．剛体の回転における慣性モーメント（§2.1 (3) の［注］を参照）とは次元も物理的な意味も異なるが，曲げにくさ（これも慣性の一種）を表すので，このような名前がつけられている．関係式 (2.11) は**ベルヌーイ－オイラーの法則**とよばれている．

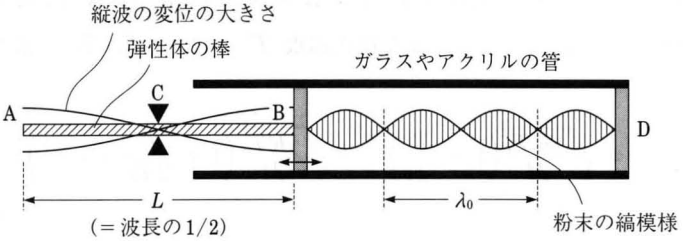
（2） 断面の幾何学的慣性モーメントの例

（i） 長方形断面の場合

断面が 2-6 図(a) のような長方形の棒を面 AB や CD に平行な面内で曲げる場合には，中立面は明らかに辺 AB，CD の中点を結ぶ面である．長方形の縦横の長さを b，a とし，図のように xy 軸をとれば

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} y^2\,dy = \frac{ab^3}{12} \tag{2.13}$$

となる（板の厚みの 3 乗に比例する！）．これと垂直な方向に曲げる場合には a と b の役割を入れ換えればよい．



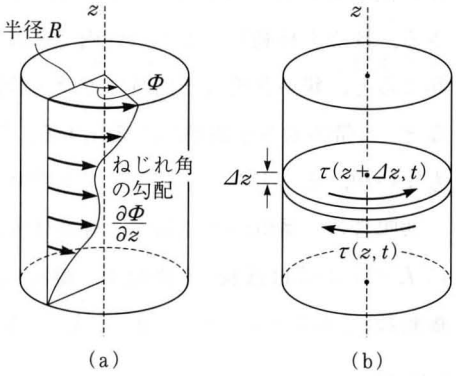
3-5図　クントの実験（平面図）

の波長 λ_0 は実測により，またそのときの気温がわかれば (3.14) から音速 v_0 が計算できる．振動数 f は空気柱と弾性体棒の双方に共通であるから $f = v_0/\lambda_0$．両者から f を消去して $E = \rho(2Lv_0/\lambda_0)^2$ を得る．

§3.2　弾性体を伝わる横波

(1)　ねじれ波

§2.1 で棒のねじれを議論したときには，棒の下端から上端まで一様なずれを仮定していた．ここでは，ずれが3-6図 (a) のように円柱の軸方向の座標 z と時間 t に依存して変化している場合にはどうなるかを考えよう．この場合にも局所的に見れば回転のモーメント τ が (2.4) の形に書けるはずである．そこで，(2.4) 式の Φ/L の代りに $\partial\Phi/\partial z$ を使って



3-6図

$$\tau(z) = \frac{\pi G R^4}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial z} \tag{3.15}$$

を得る．ただし，円柱の半径を R，ねじれの角度を $\Phi(z, t)$，ずれ弾性率を G とした．

弾性体の棒の ずれ の伝搬を考えるために，図(b) のような厚さ Δz の薄い円板部分の回転運動を考える．この円板の回転の慣性モーメント I はこの部分の質量 $\Delta m = \pi R^2(\Delta z)\rho$ を用いて $I = (1/2)(\Delta m)R^2$ であり（§2.1(3) の[注]を参照)，円板にはたらく正味の回転のモーメント N は $\tau(z + \Delta z, t) - \tau(z, t)$ である．したがって，z 軸の周りの回転運動に対するオイラーの方程式 $I(\partial^2\Phi/\partial t^2) = N(z, t)$ は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\pi R^2 \Delta z\, \rho) R^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \tau(z + \Delta z, t) - \tau(z, t) \\ &= \frac{1}{2}\pi G R^4 \left(\frac{\partial \Phi(z + \Delta z, t)}{\partial z} - \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial z} \right) \\ &= \frac{1}{2}\pi G R^4 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \Delta z + \cdots \right)\end{aligned}$$

となる．最左辺と最右辺を約分し，$\Delta z \to 0$ とすれば

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \tag{3.16}$$

これも波動方程式であり，その一般解は

$$\Phi(z, t) = \{f(x - vt),\ g(x + vt)\} \tag{3.17}$$

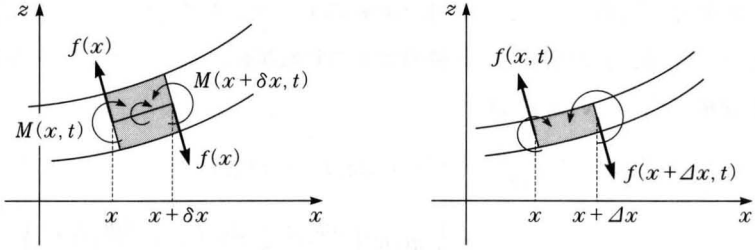
$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{3.18}$$

である．これは，ねじれの生じている方向（円周方向）と ねじれ角の非一様性が伝わっていく方向（円柱軸方向）とが直交しているので**横波**の一種である．物理的なイメージに基づいて**ねじれ波**とよぶこともある．ねじれ波の伝わる速さは円柱の半径には依存しない．

［**問題 4**］　ヤング率 E，ずれ弾性率 G の円柱状弾性体を伝わる 1 次元的な縦波の速度 (3.5) と横波の速度 (3.18) を比較し，両者の比 $v_{縦波}/v_{横波}$ がポアソン比 σ の値によりどのような範囲内にあるか述べよ．

(2) 曲げの波

自然な状態では真直ぐであった細い弾性体の棒や板（断面積 S は一様とする）にゆるやかで非一様な曲がりが生じているとする．棒や板に沿って測った任意の位置 x にある断面にはたらくモーメントを $M(x, t)$ と表すと，3-7図(a) のアミカケをした微小部分 δx にはたらく正味のモーメントは



(a) 接線応力 f とモーメント M　　(b) 板の振動

3-7図

$$M(x+\delta x, t) - M(x, t) \approx \frac{\partial M}{\partial x}\delta x$$

である．これはアミカケ部の両端面にはたらく接線応力 f によるモーメント $\delta x \times (fS)$ とつり合っている．したがって，$\delta x \to 0$ として，接線応力とモーメントの間の局所的な次の関係式を得る．

$$f(x) = \frac{1}{S}\frac{\partial M}{\partial x} \tag{3.19}$$

さて，図(b) の Δx 部分の運動を考えてみよう．この場合には§2.2で述べたような一様な曲げとは異なり，板の微小部分 Δx の両端面にはたらく応力 $f(x)$ と $f(x+\Delta x)$ は大きさも向きも異なるであろう．しかし，変形がゆるやかであればこれらの応力はほぼ反平行とみなせるから，z 方向の並進運動の運動方程式は，

$$\rho(S\,\Delta x)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -f(x+\Delta x, t)S + f(x, t)S \approx -\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\, S \tag{3.20}$$

となる．ただし ρ は弾性体の密度．これに (3.19)，および (2.11)，(2.15) から導かれる関係

$$M(x,t) = \frac{EI}{R(x,t)} \approx EI\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} \tag{3.21}$$

を代入すると

$$\rho S\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -S\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -EI\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} \tag{3.22}$$

が導かれる．これが**曲げの波**を表す方程式である．

方程式 (3.22) において $v = \sqrt{E/\rho}$，$\kappa = \sqrt{I/S}$ とおくと

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \kappa^2 v^2\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0 \tag{3.23}$$

あるいは，これを分解して

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\kappa v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)z(x,t) = 0 \tag{3.24 a}$$

または

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\kappa v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)z(x,t) = 0 \tag{3.24 b}$$

が得られる．これは量子力学でよく知られた**シュレーディンガー方程式**と同じ形である．(3.23) の解のうち，調和振動型の解は

$$z(x,t) = X(x)\cos(\omega t + \phi) \tag{3.25}$$

と仮定することにより求められる．ただし X は

$$\kappa^2 v^2 X^{(\mathrm{iv})} - \omega^2 X = 0$$

を満たし，一般解は

$$\left.\begin{aligned} &X(x) = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + C\sinh\alpha x + D\cosh\alpha x \\ &\left(A, B, C, D \text{ は定数},\ \alpha = \sqrt{\frac{\omega}{\kappa v}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

で与えられる．

（1） 静止流体と圧力

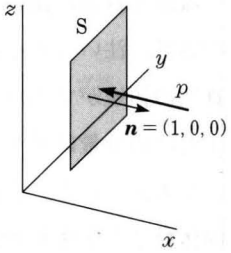
流体の静止状態（**静止流体**）を考えてみよう．流体は分子（ここでは原子も含めた構成要素を代表して分子とよぶことにする）の集合体であり，通常の温度では，一つ一つの構成分子は絶えず運動している．したがって，ここでいう静止状態とは，流体内部のいたるところで速度の時間平均が0であるものをいう．

いま静止流体中に勝手な面を考えると，この面には接線応力ははたらかない．そもそも応力は分子が面に衝突して運動量を与えるときに生じるものである．したがって，静止流体であれば，衝突する分子のうちで面に平行な速度成分が互いに逆の分子がいつも等しい確率で存在するから，平均的にみて面に平行な力が残ることはない．これに対して，法線応力だけは残る．なぜなら，もし面の裏表から同じ強さで互いに逆向きに分子の衝突があっても，面に加えられる力の合力は0になり，“静止状態”が可能だからである．もっともこれは圧力についてであって，張力が起こりえないことは衝突過程を考えれば明らかであろう．以上のことを数学的に表現すると

$$p_{ij} = -p\,\delta_{ij} \tag{6.1}$$

となる．

［**例題1**］ 6-1図のような，x 軸方向を法線方向とする面にはたらく応力を書き，これを参考にして(6.1)の表現を確かめよ．



6-1図

［**解**］ 面Sの法線 $\boldsymbol{n}$ は x 軸方向なので，これにはたらく応力は

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{p}_x = (p_{xx}, p_{yx}, p_{zx})$$

である．図より

$$p_{xx} = -p, \qquad p_{yx} = p_{zx} = 0$$

これらをまとめて

$$p_{ix} = -p\,\delta_{ix} \qquad (i = x, y, z)$$

y, z 軸方向を法線とする面についても同様なので

$$p_{iy} = -p\,\delta_{iy}, \quad p_{iz} = -p\,\delta_{iz} \quad (i = x, y, z)$$

$$\therefore \quad p_{ij} = -p\,\delta_{ij} \quad (i, j = x, y, z)$$

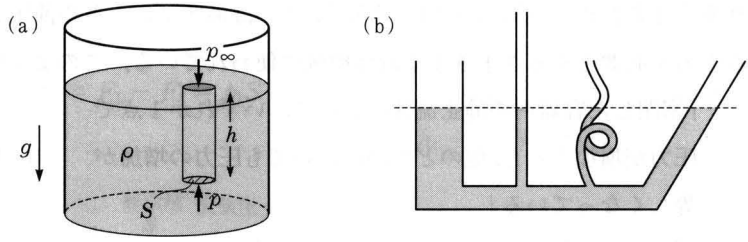
となる．§4.3 で述べたように，δ_{ij} は等方性テンソルであるから，座標系の選び方によらない．したがって，圧力はどの向きをもった面に対しても等しい．

(2) 静水圧

一様な重力の下に置かれた静止流体中の圧力を求めよう．6-2図 (a) のように，表面から深さ h までの柱状部分について力のつり合いを考える．この柱状部分の底面積を S，ここにはたらく圧力を p，大気圧を p_∞，鉛直下向きの一様な重力加速度を g，流体の密度を ρ とする．底面では圧力 p が下方から，また上方からは，その上の柱状部分に含まれる流体の重量と大気圧 p_∞ が下向きにはたらくから，

$$pS = p_\infty S + (\rho h S)g, \quad \therefore \quad p = p_\infty + \rho g h \tag{6.2}$$

となる．この圧力 p を**静水圧**とよぶ．



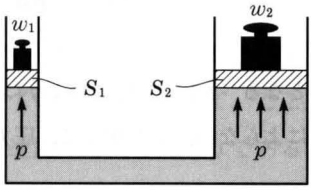
6-2図

この結果は，静水圧が流体の深さだけに依存していて，容器の形状には影響されないことを示している (図 (b) を参照)．もちろん，つながっている流体では，表面の高さはどの部分でも等しい．

［**問題 1**］ 深さ 10000 m の深海における圧力を計算せよ．ただし，海水の密度は 1.0×10^3 kg/m^3，大気圧は 1.0×10^5 Pa であるとせよ．

（3） パスカルの原理と水圧器

6-3図のように，鉛直部分の断面積 S_1，S_2 の異なる容器がパイプでつながれている．これらには流体が満たされており，両側の水面には上下に移動できるふたが乗せてある（すなわちピストンになっている）とする．重りを乗せる前には，静水圧のつり合いにより，流体は両側の水面の高さが等しい状態で静止している．



6-3図

さて，断面積 S_1 の容器のふたの上に重量 w_1 の重り，断面積 S_2 の容器のふたの上に重量 w_2 の重りを乗せたときに再びつり合ったとする．初めの状態に比べて前者では w_1/S_1 だけ圧力が増加している．この圧力増加は密閉容器内のどの面においても等しいので，断面積 S_2 の容器のふたの部分にはたらく圧力の増加量 w_2/S_2 とも等しいはずである．したがって，$w_1/S_1 = w_2/S_2$，あるいは，$w_2/w_1 = S_2/S_1$．すなわち，面積比倍の重量が支えられることになる．これが**水圧器**として知られているもので，自動車の修理の際に車両を持ち上げて作業をするための機械（カーリフト），あるいは油圧ブレーキや油圧ジャッキなど力を必要とするさまざまな流体機械に使われている．このように，

「密閉した容器内の静止流体において，いずれか1点で圧力が増加すると，他のどの点においても圧力の増加が等しくなっている」　(6.3)

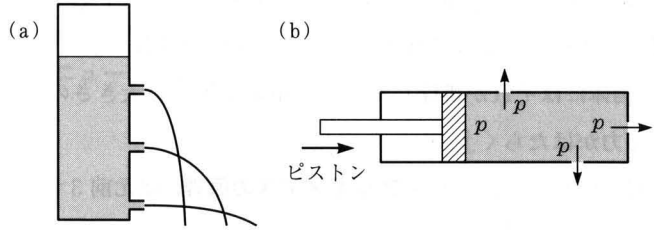
これは**パスカルの原理**（1653年頃）として知られている．

［**例題 2**］ 半径5 cmの小さなピストンに圧縮空気で力を加え，他端にある半径15 cmの大きさのピストンで車を持ち上げるカーリフトがある．車の重量が1トンであるとき，これを支えるのに必要な空気圧を求めよ．

［**略解**］ 車がピストンに与えている力 F_2 は1トン重 $= 9.8 \times 10^3$ N である．これを支えるために小さなピストンに加えるべき力は $F_1 = F_2 \times (S_1/S_2) = 9.8 \times 10^3 \times (5/15)^2$ N $\fallingdotseq 1.1 \times 10^3$ N でよい．この力を生じるために必要な空気の圧力

p_1 は $p_1 = F_1/S_1 = 1.1 \times 10^3/(\pi(0.05)^2) = 1.4 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \fallingdotseq 1.4$ 気圧.

［**問題 2**］ 6-4 図 (a), (b) で水の飛び出す様子を議論せよ. (b) では高さによる圧力の影響は無視してよい.

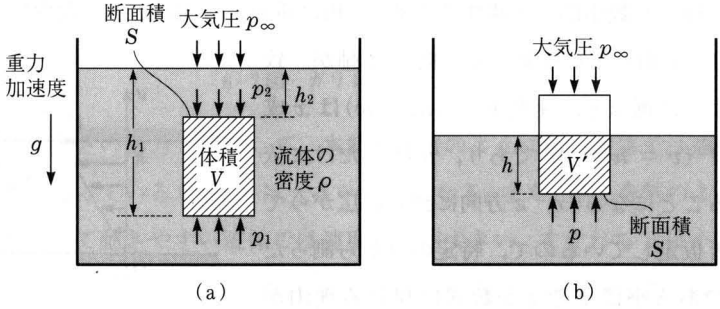


6-4 図

(4) アルキメデスの原理

6-5 図 (a) のように, 断面積 S, 体積 V の物体が密度 ρ の流体中に完全につかっているとする. 重力加速度は下向きで大きさは g とする. このとき, 物体下面には静水圧 $p_1 = p_\infty + \rho g h_1$ による上向きの力 $F_1 = p_1 S$ が, また上面には静水圧 $p_2 = p_\infty + \rho g h_2$ による下向きの力 $F_2 = p_2 S$ がはたらく. したがって, 全体として

$$F = F_1 - F_2 = p_1 S - p_2 S = (p_\infty + \rho g h_1) S - (p_\infty + \rho g h_2) S$$
$$= \rho g (h_1 - h_2) S = \rho g V$$



6-5 図

9 非粘性流体の力学

われわれが通常目にする流体の運動ではレイノルズ数がかなり大きい．たとえば，人がゆっくり歩いているときでも，野球のボールを投げたときでも，レイノルズ数は10の5乗程度になってしまう．言い換えれば，これらの流れにおいては，慣性が重要，あるいは粘性が重要でない，ということになる．そこで，この章では，レイノルズ数が大きくなった極限の場合として，非粘性の流体を考えていく．この場合には，流体の基礎方程式に含まれる非線形項をまともに取扱う必要があり，さまざまな数学的解析手段が応用される．逆に，流体力学が，壮麗な数学体系を発達させるための切っ掛けを与えていたとも言える．したがって，流体力学を学ぶことによって，そこで使われている数学に直感的イメージを膨らませることができる．もちろん，非粘性流体というのは一つの理想化であり，この仮定によって説明できない部分が生じた場合には，もとの方程式に立ち帰ってその原因を調べ，新たな方向を探らなければならない．

§9.1 オイラー方程式とベルヌーイの定理

レイノルズ数の定義は $Re = \rho UL/\mu$ であった．ここで，ρ と μ は流体の密度および粘性率，L は物体のおよその大きさ，U は流体運動に特徴的な速度である．この Re が大きい流れというのは ρ, U, L などが大きいときにも起こるが，$\mu \to 0$ の場合にも実現する．そこで，Re が無限大の流れを $\mu = 0$ の場合，すなわち，非粘性流体の流れとみなす．以下ではこの極限的な流れに

ついて調べていく．

(1)　オイラー方程式

流体の基礎方程式であるナヴィエ-ストークス方程式 (7.24) において，$\mu = 0$ と置く．簡単のために $\rho =$ 一定 と仮定すると

$$\rho \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \rho \boldsymbol{K} - \nabla p \tag{9.1}$$

となる．この式を**オイラー方程式**とよぶ．圧縮性を無視しているので，連続の方程式は (7.28) 式：

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \tag{9.2}$$

で与えられる．ここで，(9.2)，(9.1) 式は，それぞれ**質量保存則**，**運動量保存則**を表している．

(2)　オイラー方程式の第1積分

オイラー方程式 (9.1) を具体的に書くと，

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{K} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

である．ここで，左辺の非線形項を

$$(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) - \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v})$$

のように書き換えると（付録 A [2] の 8) を参照)，(9.1) 式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{K} - \nabla \left(\frac{1}{\rho} p + \frac{1}{2} v^2 \right) + \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) \tag{9.3}$$

となる．つぎに，いくつかの特別な場合について，(9.3) 式を調べてみよう．

(i)　静止流体

まず，もっとも簡単な例として静止流体 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を考えてみよう．この場合には，(9.3) 式は

$$\boldsymbol{K} = \nabla \left(\frac{1}{\rho} p \right)$$

となる．これは，外力が保存力であることを示している．そこで外力のポテンシャルを Π として $\boldsymbol{K} = -\nabla\Pi$ と表すと，

$$\nabla\left(\frac{p}{\rho} + \Pi\right) = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．この式は，空間のあらゆる方向に対して勾配がないことを意味し，また，仮定により時間的な変化もないので

$$\frac{p}{\rho} + \Pi = \text{一定} \tag{9.4}$$

でなければならない．鉛直方向（z 方向）に一様な重力場であれば，$\Pi = gz$ であるから，(9.4) 式は $p + \rho gz =$ 一定 となる．ただし，g は重力加速度である．地球では重力の大きさが等しい地点をつないでできる面をジオイドとよぶ．地球構成物質の分布が不均一なために多少の凹凸はあるものの，ジオイドはほぼ球形と考えてよい．上式は，地球規模で見たときに，静止した流体の水面が圧力（大気圧）一定の面になっていることを述べているのにほかならない．

（ii） 渦なし流れ

渦度のない流れは**渦なし流れ**とよばれる．この場合には渦度 $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{0}$ であるから，やはり速度場はポテンシャル Φ を用いて $\boldsymbol{v} = \nabla\Phi$ と書ける．これらを考慮すると，(9.3) 式は

$$\boldsymbol{K} = \nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{\rho}p + \frac{1}{2}v^2\right)$$

となる．これが成り立つためには外力は保存力でなければならない．そこで，外力のポテンシャルを Π とすると，$\boldsymbol{K} = -\nabla\Pi$ であり，

$$\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{\rho}p + \frac{1}{2}v^2 + \Pi\right) = \boldsymbol{0}$$

となる．この式が空間のあらゆる方向に対して勾配がないことを示しているのは（i）の場合と同じであるが，今度の場合には時間的な変化はあってもよいので

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{\rho} p + \frac{1}{2} v^2 + \Pi = F(t), \qquad (\text{ただし } F(t) \text{ は任意関数}) \tag{9.5}$$

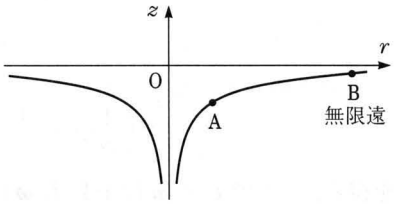
と書ける．(9.5) 式は**圧力方程式**または**一般化されたベルヌーイの定理**とよばれている．この関係は，渦なし流れ領域全体で成り立つことに注意しよう．

［例題 1］　渦による表面の凹み

9-1 図のように，無限に広い非圧縮非粘性流体が静止状態で $z < 0$ の領域を満たしていたとする．いま，z 軸を中心とした同心円状の流れ

$$v_\phi = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \qquad v_r = v_z = 0$$

が作られて定常状態になったとしよう．ただし，Γ は定数で，(r, ϕ, z) は円柱座標系である．このときの自由表面の形を決定せよ．これは §9.3 (5) で述べる渦糸の作る流れである．



9-1 図　渦と自由表面

［**解**］　この流れは $r \neq 0$ で渦なしである（$\because$　$\omega_z = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r v_\phi) = 0$, $\omega_r = \omega_\phi = 0$）．したがって，$r > 0$ で一般化されたベルヌーイの定理が使える．また，定常流であるから $\partial \Phi / \partial t = 0$, $F(t) = C$(定数) である．したがって，$\dfrac{1}{\rho} p + \dfrac{1}{2} v^2 + gz = C$ が領域内のすべての点に対して成立する．いま，無限遠での自由表面の高さを基準の位置 $z = 0$ に選ぶと，そこでは $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, $p = p_\infty$(大気圧) であるから，$C = p_\infty / \rho$ である．中心から距離 r の位置での自由表面の高さを z とすると，そこでも圧力は大気圧に等しいから $\dfrac{1}{\rho} p_\infty + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\Gamma}{2\pi r}\right)^2 + gz = \dfrac{1}{\rho} p_\infty$ が成り立つ．これより $z = -\dfrac{\Gamma^2}{8\pi^2 g r^2}$ を得る．

(iii)　保存力場内の定常流

定常流では $\partial \Phi / \partial t = 0$ である．さらに，外力のポテンシャルを Π ($\boldsymbol{K} = -\nabla \Pi$) とすると