条件付き確率の定義より，次の確率の**乗法定理**が導かれる．

定理 1.3 2つの事象 A, B がともに起こる確率 $P(A \cap B)$ は，条件付き確率を使って，次のように表される：

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$$

例題 1.2

袋の中に同じ形状の球6個が入っていて，それぞれに1, 2, 3, 4, 5, 6の数字が書いてあるとする．そのとき，袋の中から次のような2通りの方法で2個の球を取り出すことを考える．

(1) 袋の中から球を1個取り出す1回目の球の数字が i $(i = 1, \ldots, 6)$ である事象を A_i とする．次に，取り出した球を袋に戻し，よくかきまぜ，改めて袋の中から球を1個取り出すとき（復元抽出），球の数字が j $(j = 1, \ldots, 6)$ である事象を B_j とする．そのとき，取り出した2個の球の数字が i, j である確率はいくらか．

(2) 1回目に取り出した球をもとに戻さず，続けて球を取り出すとき（非復元抽出），取り出した2個の球の数字が i, j である確率はいくらか．

[解] (1) 1回目の取り出しでは，すべての球が同様の確からしさで取り出されるから，$P(A_i) = \dfrac{1}{6}$ である．取り出した球を袋に戻すならば，条件は1回目と同じであるから，2回目に袋の中から球を1個取り出し，それが j $(j = 1, \ldots, 6)$ である事象を B_j とすればその確率は $P(B_j) = \dfrac{1}{6}$ である．たとえば，1回目に1の球を取り出し，2回目に2の球を取り出す確率では

$$P(A_1 \cap B_2) = P(A_1)P(B_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

が成り立つ．この結果は，A_1, B_2 が独立であることを示している．

（2）　1回目に取り出した球をもとに戻さず2回続けて球を取り出すときには，例えば1回目に1の球が出た後は，袋の中には数字が2, 3, 4, 5, 6の5個の球しかない．したがって，条件付き確率を用いれば

$$P(B_j \mid A_i) = \frac{1}{5} \quad (i \neq j \text{ のとき}), \quad P(B_i \mid A_i) = 0$$

ゆえに，1回目に1の球を取り出し，2回目に2の球を取り出す確率は

$$P(A_1 \cap B_2) = P(A_1)P(B_2 \mid A_1) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$$

▶ **参考**　非復元抽出において，2回目に2の球を取り出す確率 $P(B_2)$ は，1回目に取り出した球が i $(i = 1, \ldots, 6)$ である事象 A_i をすべて考慮することで得られ，

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(A_1)P(B_2 \mid A_1) + P(A_2)P(B_2 \mid A_2) + P(A_3)P(B_2 \mid A_3) \\ &\qquad + P(A_4)P(B_2 \mid A_4) + P(A_5)P(B_2 \mid A_5) + P(A_6)P(B_2 \mid A_6) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \\ &= 5 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる．したがって，確率 $P(B_2 \mid A_1)$ と $P(B_2)$ は等しくない：

$$P(B_2 \mid A_1) = \frac{1}{5} \neq P(B_2) = \frac{1}{6}$$

これは，A_1, B_2 が独立でないことを示している．

例題 1.3

20本のうち，5本が当たりであるクジがあり，A, B の2人が1本ずつクジを引くものとする．

（1）　A が引いたクジをもとに戻し，よくかきまぜて次に B が引くとき（復元抽出），2人とも当たりである確率はいくらか．

（2）　A が引いたクジをもとに戻さず，次に B が引くとき（非復元抽出），2人とも当たりである確率はいくらか．

[解]　(1)　当たりである確率は $\dfrac{5}{20}=\dfrac{1}{4}$ で，もとに戻すので A, B の条件はともに同じ（独立）．したがって，求める確率は $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$ である．

(2)　A のクジが当たる確率は $\dfrac{1}{4}$，クジをもとに戻さないので B のクジが当たる確率は $\dfrac{4}{19}$．したがって，ともに当たる確率は $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{4}{19}=\dfrac{1}{19}$ である．

2.3　ベイズの定理　全人口を“10 代以下，20 代，…，60 代，70 代以上”と年代別に考えるように，全事象 S が互いに素な n 個の事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n$，$A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ に分割されているならば，次が成り立つ：

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S, \quad P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1$$

このようなとき，S は**層別** (stratification) されているといい，各 A_i を**層** (strata) という．$P(A_1), \ldots, P(A_n)$ を各層の**事前確率** (prior probability) という．層別され，その事前確率が与えられているとき，次が成り立つ．

定理 1.4　全事象が A_i $(i=1,\ldots,n)$ に層別されているとき，事象 B の確率 $P(B)$ は，A_i の事前確率 $P(A_i)$ と条件付き確率 $P(B \mid A_i)$ を使って，

$$P(B)=P(A_1)P(B \mid A_1)+P(A_2)P(B \mid A_2)+\cdots+P(A_n)P(B \mid A_n)$$

と表される．これを**全確率の公式**という．

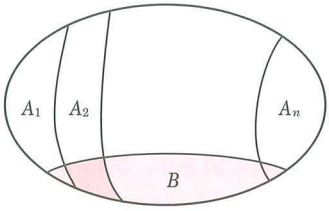

図 1.2

[証明]　事象 B は，各層に属す互いに素な事象 $A_i \cap B$ の和として

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$$

と表されるから（図 1.2 参照），その確率 $P(B)$ も公理 (iii)（p. 4）によって

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

で与えられる．これに確率の乗法定理（p. 8）を適用すれば

$$P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B \mid A_i)$$

であるから

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n)$$

となる．◆

定理 1.5　全事象が A_i $(i = 1, \ldots, n)$ に層別されているとき，事象 B が起こったときの各層の条件付き確率 $P(A_i \mid B)$ を**事後確率** (posterior probability) といい，事前確率 $P(A_i)$ と条件付き確率 $P(B \mid A_i)$ を使って，

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n)}$$

と表される．これを**ベイズの定理**という．

[証明]　層 A_i で起きる事象 B の確率 $P(A_i \cap B)$ は，乗法定理（p. 8）より，

$$P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B \mid A_i) = P(B)P(A_i \mid B)$$

であるから，全確率の公式（p. 10）より，

$$\begin{aligned} P(A_i \mid B) &= \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + \cdots + P(A_i)P(B \mid A_i) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n)} \end{aligned}$$

となる．◆

2　平均と分散

確率変数 X の分布の特徴を数値によって表すことを考えよう．よく用いられるのが**平均**あるいは**期待値** (expectation) と呼ばれるものであり，X の期待値という意味で $E(X)$ と書く．記号としてギリシャ文字のミュー μ を用いることもある．離散型のときは，確率が $p_i = P(X = x_i)$ であれば

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \quad \text{（離散型）}$$

で定義する．また，連続型のときは，密度関数が $f(x)$ であれば

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \quad \text{（密度型）}$$

で定義する．

期待値まわりにおける確率変数 X の散らばり具合を表す**分散**を $V(X)$ と書く．記号としてギリシャ文字のシグマの 2 乗 σ^2 を用いることもあり，

$$\sigma^2 = V(X) = E\{(X - \mu)^2\}$$

と定義される．したがって，期待値の式から，分散は次のように与えられる：

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i \qquad \text{（離散型）}$$

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx \quad \text{（密度型）}$$

分散の正の平方根を**標準偏差**という：

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

標準偏差は確率変数 X と同じ測定単位をもっている．たとえば，X が身長 cm であるとき，分散の単位は cm^2 であるが，標準偏差は身長と同じ単位 cm である．

一般に，確率変数 X の関数 $H(X)$ の期待値は次のように与えられる：

$$E\{H(X)\} = \sum_{i=1}^{n} H(x_i)p_i \qquad \text{（離散型）}$$

$$E\{H(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)f(x)\,dx \quad \text{（密度型）}$$

分散は $(X-\mu)^2 = H(X)$ としたときの $H(X)$ の期待値であるから，

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 p_i - 2\mu\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \mu^2 \sum_{i=1}^{n} p_i \\ &= E(X^2) - 2\mu\times\mu + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \end{aligned}$$

と変形できる．この結果を**分散公式**という：

$$V(X) = \ E(X^2) \ - \ \{E(X)\}^2$$

〔分散 = 2 乗平均 − 平均の 2 乗〕

第 2 章（p. 22）で述べたデータに対する平均 $\bar{x}$ を**標本平均** (sample mean)，分散 s^2 を**標本分散** (sample variance) といい，上で述べた確率変数 X に対する平均 μ を**母平均** (population mean)，分散 σ^2 を**母分散** (population variance) といって，呼び分けることもあるので注意しよう．

1 次式で表される確率変数に対して，次の定理が成り立つ．

定理 3.1　確率変数が $aX+b$（a, b は定数）と表されるとき，

（1）　$E(a+bX) = a + bE(X) = a + b\mu$

（2）　$V(a+bX) = b^2V(X) = b^2\sigma^2$

［証明］　平均については，

$$\text{離散型：} E(a+bX) = \sum_{i=1}^{n}(a+bx_i)p_i = a\sum_{i=1}^{n} p_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = a + b\mu$$

$$\begin{aligned} \text{密度型：} E(a+bX) &= \int_{-\infty}^{\infty}(a+bx)f(x)\,dx \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = a + b\mu \end{aligned}$$

分散については，

$$
\begin{aligned}
V(a+bX) &= E[\{(a+bX)-E(a+bX)\}^2] \\
&= E[\{(a+bX)-(a+b\mu)\}^2] \\
&= E[\{b(X-\mu)\}^2] = b^2E\{(X-\mu)^2\} = b^2V(X)
\end{aligned}
$$

◆

確率変数 X に対して，平均 $\mu = E(X)$ を引き，標準偏差 $\sigma = \sqrt{V(X)}$ で割った 1 次変換を**標準化**または **z-変換**という：

$$
Z = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \frac{X-\mu}{\sigma}
$$

z-変換の平均は 0 で，分散は 1 であることに注意しよう（p. 28）：

$$
E(Z) = 0, \quad V(Z) = E(Z^2) = 1
$$

例題 3.4

確率変数 ε がベルヌーイ分布 $Ber(p)$（p. 43）に従うときの平均と分散は

$$
E(\varepsilon) = p, \quad V(\varepsilon) = p(1-p)
$$

であることを示せ．

[解]　ベルヌーイ分布は離散型であるから，平均は

$$
E(\varepsilon) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p
$$

$0^2 = 0$，$1^2 = 1$ であるから，$\varepsilon^2 = \varepsilon$ が成り立つ．分散公式（p. 46）より

$$
V(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - \{E(\varepsilon)\}^2 = E(\varepsilon) - \{E(\varepsilon)\}^2 = p - p^2 = p(1-p)
$$

◆

例題 3.5

X をサイコロの出る目の数とするとき，その平均と分散を求めよ．また，標準偏差はいくらか．

［解］ サイコロの目の数 X は離散型であるから，平均は

$$\mu = E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + \cdots + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

次に，X の 2 乗平均は

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + \cdots + 6^2 \times \frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

よって，分散公式（p. 46）から，分散は

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12} = 2.917$$

したがって，標準偏差は

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = 1.708$$

◆

例題 3.6

確率変数 X の確率が

$$P(X = x) = cx \quad (c \text{ は定数})$$

で与えられ，x は 1, 2, 3, 4 の値のみをとるものとする．

（1） c の値を求めよ．

（2） この確率変数 X の平均を求めよ．

（3） X の分散と標準偏差を求めよ．

（4） X の z-変換 Z はどのような確率変数か．

次節以降では，正規分布に従う標本の標本平均や標本分散に対する分布について，もっと詳細な議論を行う．さらに，一般の分布に従う標本に対して，標本数 n が大きいときに「大数の法則」と「中心極限定理」(p. 92, 93) を使い，標本平均の近似的な性質を論じる．

3　正規分布から導かれる標本分布

母集団が正規分布に従うとき，その無作為標本 $X_1, \ldots, X_n$ の標本平均 $\bar{X}$ と標本分散 S^2 の分布について詳しく検討し，カイ 2 乗分布，ティー分布，エフ分布というよく知られた分布が導かれることを示そう．

定理 5.4　正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う n 個の無作為標本 $X_1, \ldots, X_n$ の標本平均 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う．したがって，その z-変換 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う：

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \iff Z = \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

[証明]　定理 4.3 (p. 73) により，正規確率変数の和が再び正規分布に従うことから，和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ は正規分布に従うことがわかる（正規分布は平均と分散で決まる，p. 56）．一方，和の平均と分散はそれぞれ $n\mu$, $n\sigma^2$ となるから，

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2), \quad \therefore\ \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

となる．z-変換はその定義式 (p. 57) より明らかである．◆

3.1　カイ 2 乗分布　標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う ν 個の無作為標本 $Z_1, \ldots, Z_\nu$ の 2 乗和

$$X = \sum_{i=1}^{\nu} {Z_i}^2$$

は**自由度** (degree of freedom; d.f.) ν の**カイ2乗分布** (chi-square distribution) と呼ばれる分布に従うことが知られており，この分布を記号 ${\chi^2}_\nu$ で表す．

自由度 ν のカイ2乗分布に従う確率変数 X の平均と分散は

$$E(X) = \nu, \quad V(X) = 2\nu$$

である．ここで，ν（ギリシャ文字のニュー）は正の整数を表す．

▶ **参考** 自由度 ν のカイ2乗分布に従う確率変数 X の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)2^{\frac{\nu}{2}}} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x}, \quad x > 0$$

で与えられることが知られている．ただし，

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx \quad (s > 0)$$

であり，これを**ガンマ関数** (gamma function) とよぶ．ガンマ関数は次の性質をもつ：

(1) $\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

(2) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

(3) 正の整数 n に対して，$\Gamma(n) = (n-1)! = (n-1)(n-2)\cdots 1$

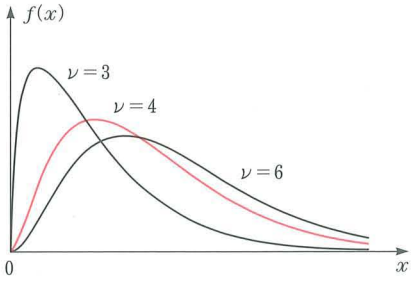

図 5.1 自由度 $\nu = 3, 4, 6$ のカイ2乗分布の密度関数 $f(x)$

カイ2乗分布表（付表3）では，表側（ひょうそく）に自由度 ν をとり，表頭（ひょうとう）に確率 α をとる．自由度 ν の水平行と確率 α の垂直列が交わるところにある数値が自由

度 ν の**カイ 2 乗値** ${\chi^2}_\nu(\alpha)$ であり，

$$P\{X \geq {\chi^2}_\nu(\alpha)\} = \alpha$$

を意味する．すなわち，自由度 ν のカイ 2 乗分布に従う確率変数 X が ${\chi^2}_\nu(\alpha)$ 以上 $(X \geq {\chi^2}_\nu(\alpha))$ をとるとき，その確率 P が α になるという意味で，${\chi^2}_\nu(\alpha)$ をカイ 2 乗分布の**上側 α 点**または，**上側 100α% 点**という．

例題 5.2

自由度が 10 のカイ 2 乗分布に従う確率変数 X がある値を超える確率が 5% であるようにするには，その値をいくらにすればよいか．

[解]　$\nu = 10$，$\alpha = 0.05$ として上側 5% 点 ${\chi^2}_{10}(0.05)$ をカイ 2 乗分布表（付表 3）より求めればよい．すなわち，${\chi^2}_{10}(0.05) = 18.307$ を得る．◆

定理 5.5　母集団が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき，これから得られた無作為標本 $X_1, \ldots, X_n$ の標本平均を $\bar{X}$ とすると

$$Y = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2}$$

は自由度 $\nu = n - 1$ のカイ 2 乗分布に従う．

[証明]　定理 5.2（p. 83）において X_i の z-変換 $Z_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$，$\bar{X}$ の z-変換 $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ を考えるとき，

$$\begin{aligned} X = \sum_{i=1}^{n} {Z_i}^2 &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \\ &= \frac{n}{\sigma^2}\{S^2 + (\bar{X} - \mu)^2\} = Y + Z^2 \end{aligned}$$

と書ける．X は自由度 n のカイ 2 乗分布に従い，定理 5.4（p. 85）より Z^2 は自由度 1 のカイ 2 乗分布に従う．このことから，Y が自由度 $\nu = n - 1$ のカイ 2 乗分布に従い，Z と独立であることが導かれる．◆

第7章

検　　定

統計的推測のもう1つの方法は，母集団分布の母数に関して2つの仮説を立て，どちらの仮説が正しいかをデータから判定するという方法であり，**仮説検定** (test of hypotheses) と呼ばれる．

本章も第6章と同様に，母集団が正規分布に従うことを仮定する．

1　検定の手順

検定は通常次のステップで進められる．

(1)　仮説の設定　母数 θ は既知の値 θ_0, θ_1 のどちらか一方であるが，どちらが正しいかは未知であるとする．そこで，次の2つの仮説を考える：

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{帰無仮説}$$
$$H_1 : \theta = \theta_1 \quad \text{対立仮説}$$

通常の命題を**帰無仮説** (null hypothesis) といい，H_0 で表し，それに相対する命題を**対立仮説** (alternative hypothesis) といい，H_1 で表す．

2つの仮説は二者択一で，「H_0 でもあり H_1 でもある」とか「H_0 でもなければ H_1 でもない」というような曖昧な結論とならないように構成される．

上の仮説のようにそれぞれ1点 θ_0 や θ_1 からなるものを**単純仮説**といい，複数の点や区間で与えられるものを**複合仮説**という．

特に，対立仮説としては，帰無仮説の両側にある**両側仮説**：

$$\text{(a)} \quad H_1 : \theta \neq \theta_0 \quad \text{(両側仮説)}$$

または，帰無仮説の右側にある**右側仮説**や左側にある**左側仮説**：

(b)　$H_1 : \theta > \theta_0$　(右側仮説)，　または，　(c)　$H_1 : \theta < \theta_0$　(左側仮説)

を考える．右側仮説あるいは左側仮説の場合を**片側仮説**ともいう．

具体例においては，これらのうちのどれを対立仮説として用いるかは非常に重要である．たとえば，中学生と高校生の身長の差を検討するとき，「高校生は成長が止まって差がない」のか，「成長は止まらず差がある」のか，ということが問題にされているのだから，

(a)　中学生 $\neq$ 高校生　または　(b)　中学生 $>$ 高校生

というようなものを対立仮説として検討する必要はなく，

(c)　H_1 : 中学生 $<$ 高校生　(右側仮説)

を考えればよい．どれを対立仮説として用いるかの判断はデータを見てから行うものではなく，**対立仮説はデータを見る前に書く**べきである．

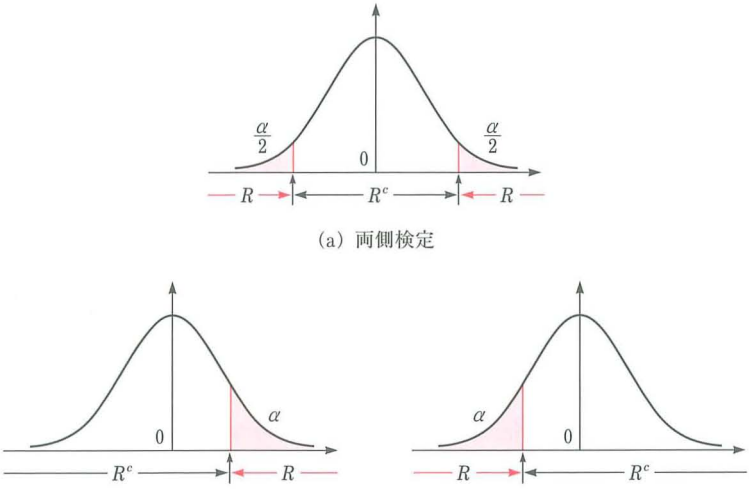

図 7.1　棄却域 R と採択域 R^c

(2) 検定統計量の選定 検定する母数についての情報をもつ統計量の中で，帰無仮説と対立仮説の差をもっとも反映するような統計量を用いることが非常に重要である．検定に用いられる統計量を**検定統計量**という．

(3) 有意水準と棄却域の設定 検定の結論は確率を用いた判断であるために，帰無仮説が正しいのに，検定の結論としては帰無仮説を棄て対立仮説を採ってしまう誤りの確率 α を設定する．この α を**有意水準** (significance level) または**危険率**という．実用では危険率が小さいことが求められるため，通常，有意水準としては，$\alpha = 0.10, 0.05, 0.01$ などが選ばれる．本書では特に断りのない限り，$\alpha = 0.05$ としている．問題の性質に応じてもっと厳密に，$\alpha = 0.01$ などとして検定せねばならないこともある．

検定統計量 T の確率分布から，α に対応した T の領域 R が両側（片側対立仮説の場合は片側）に設定される（図 7.1 参照）：

$$P(T \in R \mid H_0) = \alpha \quad \text{（有意水準）}$$

この領域 R を**棄却域** (rejection region) といい，その補集合 R^c を**採択域** (acceptance region) という．T の実現値（データ値）が R に入れば帰無仮説 H_0 を**棄却する** (reject)，R^c に入れば帰無仮説 H_0 を**採択する** (accept) という意味である．このためには，T の分布する領域を棄却域 R と採択域 R^c に分ける基準をデータを得る前にあらかじめ定めておく必要がある．

(4) 帰無仮説の棄却と採択 データ $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ から検定統計量 T の実現値 $t = T(\boldsymbol{x}) = T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を得て，帰無仮説を棄却するか，採択するかの判定を行う．すなわち，実現値が棄却域に含まれるか，採択域に含まれるかをみて

$$\begin{aligned} t \in R \quad &\Longrightarrow \quad H_0 \text{ を棄却} \quad (\theta \neq \theta_0 \text{ であって，有意差あり}) \\ t \in R^c \quad &\Longrightarrow \quad H_0 \text{ を採択} \quad (\theta = \theta_0 \text{ であって，有意差なし}) \end{aligned}$$

の結論を導く．

以下の一般論の説明や例題では繁雑さを避けるため，対立仮説には両側仮説

2　分散比について

1 節（p. 127）における母平均の差 $d = \mu_1 - \mu_2$ についての推定や検定では，正規 2 標本の分散は未知であるが共通分散をもつとすることで推定や検定ができたが，一般には，2 標本間の分散が同じであるかどうかの情報を得る必要がある．

母分散の比 $r = \dfrac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_2}^2}$ の推定量は不偏分散の比 $\hat{r} = \dfrac{{U_1}^2}{{U_2}^2}$ であり，それらは自由度 $(\nu_1, \nu_2) = (n_1 - 1, n_2 - 1)$ のエフ分布に従う：

$$\frac{\hat{r}}{r} = \frac{{U_1}^2/{\sigma_1}^2}{{U_2}^2/{\sigma_2}^2} \sim F_{\nu_2}^{\nu_1} = \frac{{\chi^2}_{\nu_1}/\nu_1}{{\chi^2}_{\nu_2}/\nu_2}$$

2.1　分散比の区間推定　自由度 $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ のエフ分布の上側 $\alpha/2$ 点 $F_{n_2-1}^{n_1-1}(\alpha/2)$，上側 $1 - \alpha/2$ 点 $F_{n_2-1}^{n_1-1}(1 - \alpha/2)$ に対して，

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P\left\{F_{n_2-1}^{n_1-1}(1 - \alpha/2) < \frac{\hat{r}}{r} < F_{n_2-1}^{n_1-1}(\alpha/2)\right\} \\ &= P\left\{\frac{\hat{r}}{F_{n_2-1}^{n_1-1}(\alpha/2)} < r < \frac{\hat{r}}{F_{n_2-1}^{n_1-1}(1 - \alpha/2)}\right\} \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，母分散の比 $r = \dfrac{{\sigma_1}^2}{{\sigma_2}^2}$ の信頼度 α の信頼区間は

$$I = \left[\frac{\hat{r}}{F_{n_2-1}^{n_1-1}(\alpha/2)}, \frac{\hat{r}}{F_{n_2-1}^{n_1-1}(1 - \alpha/2)}\right]$$

である．また，エフ分布の上側 $1 - \alpha/2$ 点については次のことが成り立つ：

$$F_{n_2-1}^{n_1-1}(1 - \alpha/2) = \frac{1}{F_{n_1-1}^{n_2-1}(\alpha/2)}$$

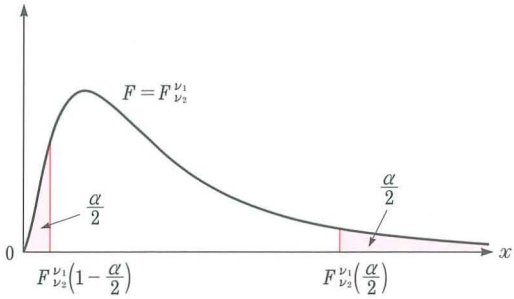

図 8.1　エフ分布の上側 $\alpha/2$ 点と下側 $\alpha/2$ 点

例題 8.3

女子学生 25 人の体重の不偏分散は 19.6567（kg^2）であり，新生児 25 人の体重の不偏分散は 201432.6667（g^2）であった．女子学生と新生児の体重の分散比の 90% 信頼区間を求めよ．

[解]　不偏分散の単位を g^2 に合わせて比をとると，

$$\hat{r} = \frac{19656700}{201432.6667} = 97.584$$

である．自由度 (24, 24) のエフ分布の上側 5% 点は $F^{24}_{24}(0.05) = 1.98$ であるから，下側 5% 点，すなわち，上側 95% 点は

$$F^{24}_{24}(0.95) = \frac{1}{F^{24}_{24}(0.05)} = \frac{1}{1.98} = 0.5050$$

ゆえに，分散比の 90% 信頼区間 I は次のようになる：

$$I = [97.584/1.98,\ 97.584/0.5050] = [49.285,\ 193.236]$$

◆

2.2　等分散の検定　次に，正規 2 標本の母分散の相等性につての仮説

$H_0 : r = 1$　帰無仮説　（母分散は等しい）
$H_1 : r \neq 1$　対立仮説　（母分散は異なる）

を検定することを考えよう．不偏分散の比はエフ検定統計量と呼ばれ，$F = \hat{r}$ と書く．帰無仮説 $r = 1$ の下では，統計量 F は自由度 $(\nu_1, \nu_2) = (n_1 - 1, n_2 - 1)$ のエフ分布に従う（対立仮説 $r \neq 1$ の下では統計量 F はエフ分布よりも r の積の分だけ大きめ，または小さめに分布する）：

$$F = \frac{{U_1}^2}{{U_2}^2} \sim F_{\nu_2}^{\nu_1}$$

したがって，信頼度 α の棄却域 R は

$$R = \{F : F < F_{\nu_2}^{\nu_1}(1 - \alpha/2),\ F_{\nu_2}^{\nu_1}(\alpha/2) < F\}$$

例題 8.4

ある動物を無作為に 2 群 A, B に分け，2 種類のエサを与えて成長の差を調べた．体重について次のデータを得たとき，両エサによる成長のばらつきは同じといえるか（例題 8.2，p. 129 参照）．

	平均	分散	標本数
A	168.1	8.8	10
B	164.3	10.1	8

[解]　平均値ではなく，分散を問題とする．

$$H_0 : {\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2 \quad \text{帰無仮説}$$
$$H_1 : {\sigma_1}^2 \neq {\sigma_2}^2 \quad \text{対立仮説}$$

として，分散比の検定を行う．エフ分布の上側 0.05 点は $F_7^9(0.05) = 3.68$，下側 0.05 点は

$$F_7^9(0.95) = \frac{1}{F_9^7(0.05)} = \frac{1}{3.29} = 0.304$$

で求められ，このときの棄却域 R は

$$R = \{F : F < 0.304,\ F > 3.68\}$$

である．標本分散を不偏分散に直すと，

$$u_1{}^2 = \frac{n_1 s_1{}^2}{n_1 - 1} = \frac{10 \times 8.8}{9} = 9.778$$

$$u_2{}^2 = \frac{n_2 s_2{}^2}{n_2 - 1} = \frac{8 \times 10.1}{7} = 11.543$$

となり，F の実現値 f は

$$f = \frac{u_1{}^2}{u_2{}^2} = \frac{9.778}{11.543} = 0.847$$

で，これは棄却域 R に含まれず，このデータから有意水準 0.10 で等母分散を否定できない．

例題 8.5

A 校の生徒 16 名，B 校の生徒 12 名に読解力テストを実施して，A 校の平均 $\bar{x} = 73$，標準偏差 $s_1 = 27$，B 校の平均 $\bar{y} = 56$，標準偏差 $s_2 = 14$ を得た．両校の成績のばらつきが異なるといえるか．

[解]

$$H_0 : \sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2 \quad \text{帰無仮説}$$
$$H_1 : \sigma_1{}^2 \neq \sigma_2{}^2 \quad \text{対立仮説}$$

として，分散比の検定を行う．エフ分布の上側 0.05 点は $F_{11}^{15}(0.05) = 2.72$，下側 0.05 点は $F_{11}^{15}(0.95) = \dfrac{1}{F_{15}^{11}(0.05)} = \dfrac{1}{2.507} = 0.399$ で求められ，このときの棄却域 R は

$$R = \{F : F < 0.399,\ F > 2.72\}$$

である．標本分散を不偏分散に直すと，

$$u_1{}^2 = \frac{16 \times 27^2}{15} = 777.6, \quad u_2{}^2 = \frac{12 \times 14^2}{11} = 213.82$$

となり，F の実現値 f は

$$f = \frac{u_1{}^2}{u_2{}^2} = \frac{777.6}{213.82} = 3.637$$

で，これは棄却域 R に含まれ，したがって有意水準 0.10 で等母分散は否定される．