はじめに

高校時代から数学が好きで，将来も大学院で数学を勉強したいが，大学の授業も難しいし，教科書もかなり難解だ，と感じている方々が多くいらっしゃるのではないかと思います．簡単なことを書いている本，高級で難しい本は比較的多くあります．しかしこのような方々が切望している書物は，実は少ないのではないでしょうか．そういう方々のために，その理論の本質的な部分を理解するための実質的な入門書，という意味を込めて，本シリーズを「リアル入門」と名付けました．

本書は，多変数関数の微積分とベクトル解析の内容を説明するものです．はじめに多変数関数の微積分を説明し，多変数関数の連続性，偏微分可能性などの言葉を厳密に説明してから，ベクトル解析に入っていくほうが数学的に自然であり，執筆するのも楽でいいのですが，理論を厳密に説明していく前に，多変数関数を具体的な曲線，曲面でとらえていったほうが，「リアル入門」としてふさわしいのではないかと考えました．その一方で，多変数関数の微積分の内容とベクトル解析の内容を混ぜてしまうと，読者の利便性に反するのではないかとも考えました．そこで極力，前半をイメージ，直観的にとらえやすい内容とし，後半を理論的な内容としました．よって前半において多変数関数の連続性，偏微分可能性などの言葉を詳しい説明なしに用いますが，ベクトル解析の一般的な入門書でもそうなので，読者の利便性にあまり反することはないものと考えます．

第 I 部では，曲線のパラメータ表示と接線ベクトル，陰関数表示，スカラー場の線積分などを扱い，第 II 部では曲面の接平面，立体の体積，スカラー場の面積分を扱います．第 III 部ではベクトル場の微分作用素とポテンシャルを扱います．また応用例としてマックスウェルの電磁方程式を扱います．第 IV 部では多変数関数の微積分を理論的に扱います．3 次元空間内の曲面の陽関数

表示，陰関数表示，パラメータ表示の微分の関係性を，陰関数定理，逆写像定理によって与えます[*1]．その他，極値問題，重積分などを扱います．最後に第 V 部でベクトル場の積分，特にストークスの定理，ガウスの発散定理などのベクトル場の積分定理を扱います．たとえば，渦がないことと，仕事が経路によらないことと，スカラーポテンシャルをもつことの同値性を考えます．なお本書全体にわたって，読者はすでに 1 変数の微積分，線形代数を学んでいることとしました．

筆者はこれまで，流体力学の基礎方程式の研究を，純粋数学としての解析学の立場からと，応用数学としての物理数学の立場から行い，そして物理数学の「視点」を解析学に応用するという手法を教育数学に適用することで，[17],[18],[19] を著わしてきました．物理数学に純粋数学を応用するのは常識的ですが，純粋数学に物理数学的視点を応用するのはあまり常識的ではありません．物理学者は数学を数学として理解することもできますが，物理学的に理解しようとする，すなわち，もともと意味をもたない論理表現であった数学に，何らかの意味をもたせて理解しようとすることも多くあります．しかし純粋数学は抽象的であることが本質的特性であり，抽象的でなければ数学ではないという言い方もできるでしょう．純粋数学の良書も数多くあり，また数学を道具として扱う非数学者による数学書も数多くあります．本書は，その間をいく数学書を目指しています[*2]．

本書出版にあたり，（株）裳華房編集部の亀井祐樹氏に心から感謝の意を表します．

2025 年 7 月

髙橋秀慈

[*1] 平面上の曲線は陽関数表示 $y = f(x)$ またはパラメータ表示 $(x(t), y(t))$ または曲面 $z = f(x, y)$ の等高線で表され，これらの微分の関係性を第 I 部で考えていて，その応用となっています．

[*2] [5] の序文が大変刺激となりました．