第5章

累次積分

5.1　立体の体積

集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された関数 $z = f(x, y) \geq 0$ に対して $\mathbb{R}^3$ での立体

$$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\} \tag{5.1}$$

の体積を考えたい（図 5.1）.

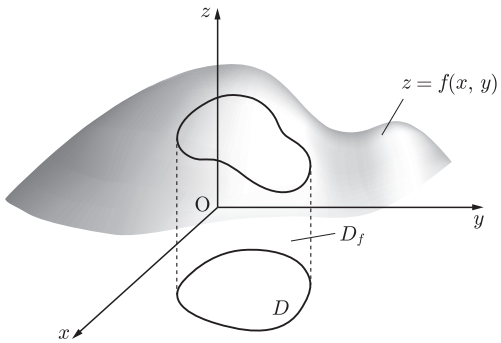

図 5.1

D_f の体積を $|D_f|$ で表す．$|D_f|$ の与え方に，累次積分によるものと重積分によるものがある．ここでは累次積分を考え，重積分は第 14 章で考察する．

5.2　D が長方形のときの累次積分

座標軸に平行な辺をもつ長方形を考える．

$$\begin{aligned} D &= [a,b]\times[c,d] \\ &:= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b],\ y\in[c,d]\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\} \end{aligned} \tag{5.2}$$

y 軸に垂直に切る

立体 D_f を y 軸に垂直に切ることを考える（図 5.2）．

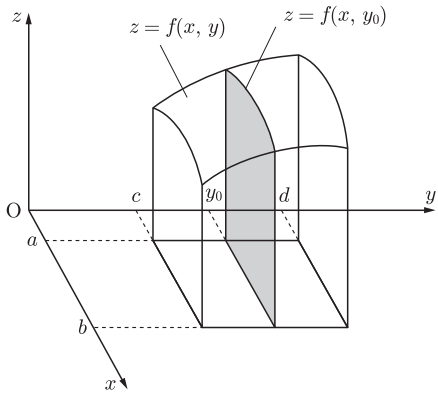

図 5.2

$y_0\in[c,d]$ を通り，y 軸に垂直な断面は

$$\{(x,y_0,z)\in\mathbb{R}^3 \mid a\le x\le b,\ 0\le z\le f(x,y_0)\}$$

で与えられる．

もし $z=f(x,y)$ が y によらず，$z=g(x)$ と書けるならば，図 5.3 の断面は y_0 によらず同じ図形となり，その断面積 $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ は y_0 によらず一定である．このとき，D_f の体積は

$$|D_f| = (d-c)\int_a^b g(x)dx$$

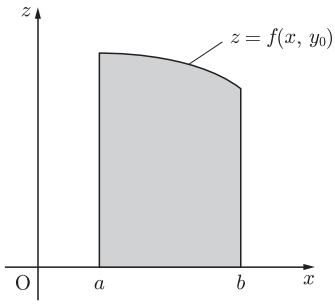

図 5.3

で与えられる．

$z = f(x, y)$ が y によって異なるときは，図 5.3 の断面積は y_0 によって異なるので，y_0 の関数となり，

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)dx \tag{5.3}$$

に対して，$F(y_0)$ で与えられる．このとき，図 5.2 の立体 D_f の体積は，あらゆる y_0 における $F(y_0)$ の総和

$$|D_f| = \int_c^d F(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy \tag{5.4}$$

で与えられる．

x 軸に垂直に切る

今度は立体 D_f を x 軸に垂直に切ってみる．$x_0 \in [a, b]$ を通って x 軸に垂直に切る（図 5.4）．その断面積を $G(x_0)$ とすると

$$G(x_0) = \int_c^d f(x_0, y)dy$$

となる（図 5.5）．このとき $|D_f|$ は

$$|D_f| = \int_a^b G(x_0)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx \tag{5.5}$$

によって与えられる．(5.4) と (5.5) の $|D_f|$ は等しく，右辺の積分を $f(x, y)$ の D での累次積分という．

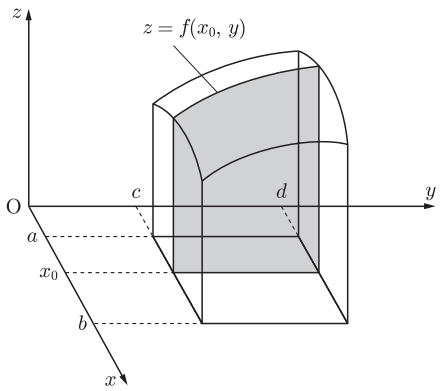

図 5.4

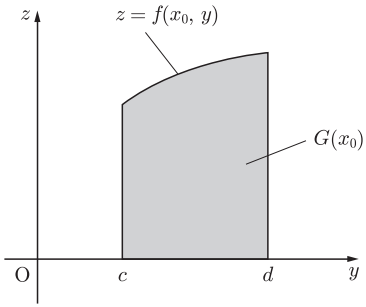

図 5.5

例 5.1　$f(x,y)=4xy$ に対して (5.4) は

$$|D_f| = \int_c^d \left(\int_a^b 4xy dx \right) dy = \int_c^d 2y \left(\int_a^b 2x dx \right) dy = (b^2 - a^2)(d^2 - c^2)$$

このように $4xy$ を x で積分するときは y を定数のように扱う．(5.5) も同様に計算できる．　◇

5.3　積分順序の交換

D が三角形のとき

まず D が三角形のときを考える（図 5.6）.

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2x\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 2,\ \frac{1}{2}y \le x \le 1\} \end{aligned} \tag{5.6}$$

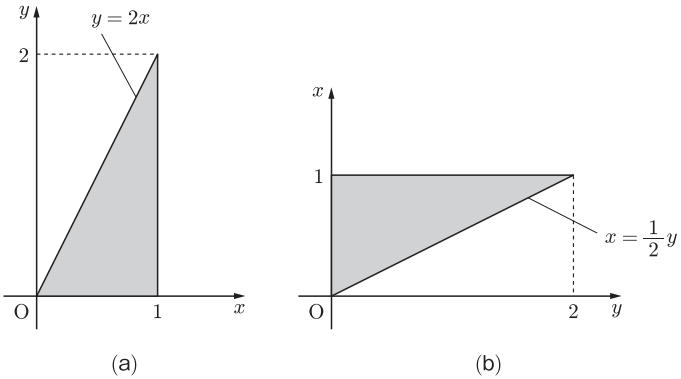

図 5.6

D が (5.6) で与えられるとき，(5.1) の D_f に対して，x 軸に垂直な $x = x_0$

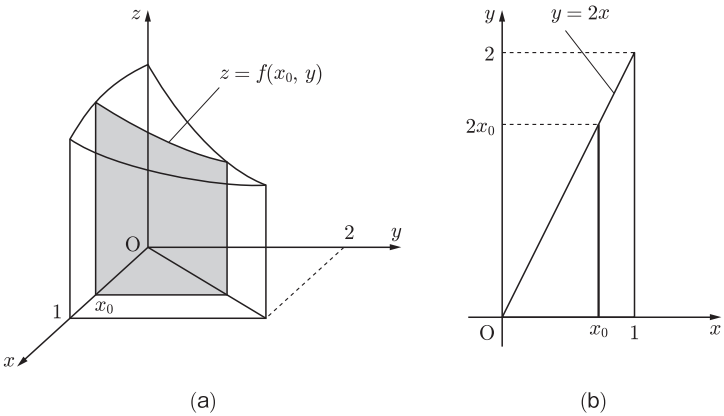

図 5.7

での断面を考える（図 5.7）．

断面領域は

$$\{(x_0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq 2x_0,\ 0 \leq z \leq f(x_0, y)\}$$

で与えられ，その断面積は

$$G(x_0) = \int_0^{2x_0} f(x_0, y)dy$$

で与えられる．この場合では x_0 が 1 に近づくほど $G(x_0)$ を求めるための積分区間 $[0, 2x_0]$ が大きくなることがわかる．$0 \leq x_0 \leq 1$ であるので

$$|D_f| = \int_0^1 G(x)dx = \int_0^1 \left(\int_0^{2x} f(x, y)dy \right) dx \tag{5.7}$$

となる．

次に，この D_f に対して，y 軸に垂直な $y = y_0$ での断面を考える．

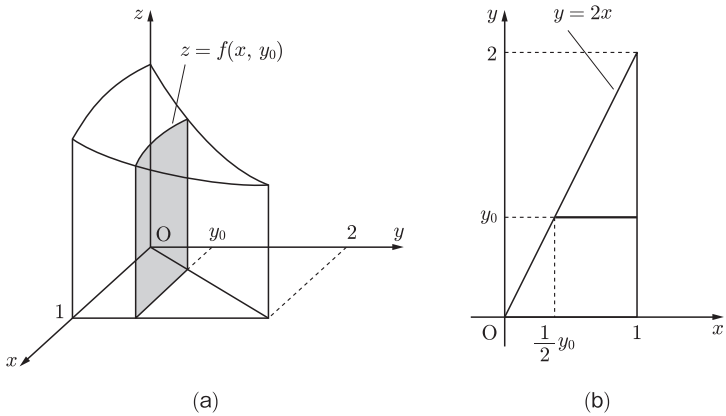

図 5.8

断面積 $F(y_0)$ は図 5.8 からわかるように，

$$F(y_0) = \int_{\frac{1}{2}y_0}^1 f(x, y_0)dx$$

ここで $0 \leq y_0 \leq 2$ であり，積分区間 $\left[\dfrac{1}{2}y_0, 1\right]$ は y_0 が 2 に近づくほど小さく

なる．以上より

$$|D_f| = \int_0^2 F(y)dy = \int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}y}^1 f(x,y)dx \right) dy \tag{5.8}$$

となる．(5.7),(5.8) より，

$$\int_0^1 \left(\int_0^{2x} f(x,y)dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}y}^1 f(x,y)dx \right) dy$$

となるが，これを積分順序の交換という．

D が 1 次関数のグラフで挟まれる領域のとき

今度は，D が 1 次関数のグラフで挟まれる領域のときを考える（図 5.9）．

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 2x\} = D_1 \cup D_2 \\ D_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1,\ \frac{1}{2}y \leq x \leq y\} \\ D_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 2,\ \frac{1}{2}y \leq x \leq 1\} \end{aligned} \tag{5.9}$$

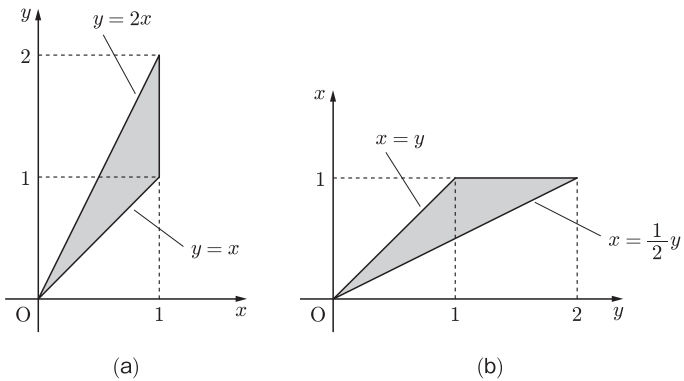

図 5.9

図を参照して

$$
\begin{aligned}
|D_f| &= \int_0^1 \left(\int_x^{2x} f(x,y)dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_{\frac{1}{2}y}^{y} f(x,y)dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{2}y}^{1} f(x,y)dx \right) dy
\end{aligned}
$$

D が関数 $y = f(x)$ と x 軸に挟まれる領域のとき

さて

$$
\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} f(x,y)dy \right) dx
$$

の積分順序の交換を考える．そのために，積分領域がどこかを求めよう．記号上，内側の積分が y による積分なので，まず y で積分してから x で積分している．外側の積分が x による積分なので，横軸を x 軸とする．内側の y による積分の積分区間が $[0, x^2]$ なので，直線 $y = 0$ と曲線 $y = x^2$ に挟まれる部分で積分する（図 5.10）．よって x 軸と y 軸をとりかえると (b) のようになる．

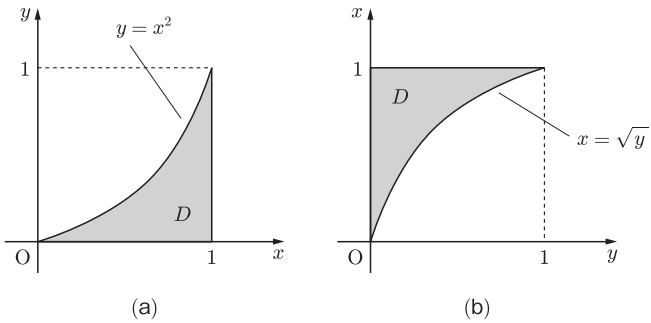

図 5.10

$$
\begin{aligned}
D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1,\ \sqrt{y} \leq x \leq 1\}
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

よって積分順序の交換は

$$|D_f| = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} f(x,y)dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx \right) dy$$

となる．

例 5.2

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{x^3+1} dx \right) dy$$

について，$\dfrac{1}{x^3+1}$ を部分分数分解していくやり方は大変なので，積分順序の交換を利用して計算する．

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{1}{x^3+1} dx \right) dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{x^3+1} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x^3+1} \Big[y \Big]_0^{x^2} dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{3} \frac{(x^3+1)'}{x^3+1} dx \\
&= \frac{1}{3} \Big[\log(x^3+1) \Big]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} \log 2
\end{aligned}$$

◇